Primer Trabajo Práctico

Entrega de las respuesta.

- Este Trabajo Práctico está disponible en la sección "Trabajos Prácticos" del aula virtual desde las 9:00hs del lunes 4/5/20.
- Deben enviar su respuesta a través del aula virtual, en la misma sección "Trabajos Prácticos", antes de las 23:59hs del miércoles 6/5/20.
- El sistema sólo acepta archivos pdf. Pueden sacarle fotos a sus hojas y convertirlas en pdf o (recomendado) usar aplicaciones para celulares como "Tiny Scanner", "FotoScan", "CamScanner", etc. que simulan un escáner. También pueden escribir su respuesta utilizando medios digitales (procesadores de textos, tablet, etc).
- En caso de tener problemas de conexión a internet u algún otro problema pueden enviar su respuesta por email (cristianvay@gmail.com) o usando telegram al docente Cristian Vay. Usar esta opción sólo en caso de ser necesario.

Pautas a tener en cuenta.

- Justificar todas las respuestas.
- Puede usar cualquier método y resultado para responder siempre y cuando esté bien justificado.
- Recuerde indicar en sus respuestas las operaciones elementales por filas que realiza.
- No se responderán preguntas de ningún tipo.

Puntaje. Se aprueba con 40 puntos o más.

1a	1b	2	3	4	5a	5b	6	7	8	Total

Ejercicios.

(1) (10 puntos cada item) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix}$.

(a) Describir explícitamente el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

(b) Describir implíctamente el conjunto de vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que el sistema

$$AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

tiene solución.

(2) (10 puntos) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

(a) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $CA = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(d) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Determinar si las siguientes matrices son inversibles o no. Hallar la matriz inversa cuando sea posible. Puede usar cualquier método siempre y cuando esté bien justificado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & -16 & 8 & 48 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (10 puntos) Calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{pmatrix}$

(5) (10 puntos cada item) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tales que $\det A = 2$, $\det B = 3$ y $\det C = 4$.

(a) Calcular $\det(-AB^tC^{-1}A^2)$.

(b) Calcular $\det(PQR)$ donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

(6) (10 puntos) Calcular los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Decidir si alguno de los siguientes vectores es un autovector de la matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(7) (10 puntos) El número 2 es un autovalor de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 50 \end{pmatrix}$. Describir explícitamente el autoespacio asociado al autovalor 2.

(8) (10 puntos) Sean $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con P inversible. Probar que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A entonces también es autovalor de PAP^{-1}.